

Een sangaku (en niet alleen) als het regent

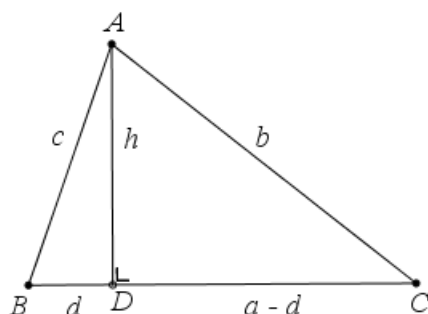
DICK KLINGENS (dklingens@gmail.com)

Krimpen aan den IJssel, juli 2017

1. Vooraf

Ik bewijs eerst enkele eigenschappen van de driehoek die in verband staan met het in paragraaf 2 voor te leggen probleem en die bij de oplossing daarvan mogelijk gebruikt worden.

figuur 1



In figuur 1 is driehoek ABC weergegeven met de gebruikelijke naamgeving van de zijden. AD is de hoogtelijn uit A , waarbij $AD = h$, $BD = d$ en $CD = a - d$.

Volgens de stelling van Pythagoras bestaan nu de volgende relaties:

$$(1) \dots b^2 = h^2 + (a - d)^2$$

$$(2) \dots c^2 = h^2 + d^2$$

Aftrekking van (1) en (2) geeft dan:

$$b^2 - c^2 = (a - d)^2 - d^2 \quad \text{of} \quad b^2 - c^2 = a^2 - 2ad$$

En hieruit volgt:

$$(3) \dots d = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2a}$$

Substitutie van (3) in (2) geeft:

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2a} \right)^2 \quad \text{of} \quad h^2 = c^2 - \left(\frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2a} \right)^2$$

Vermenigvuldiging met $(2a)^2$ resulteert in:

$$(4) \dots 4a^2h^2 = (2ac)^2 - (-b^2 + a^2 + c^2)^2$$

Met de formule voor het verschil van twee kwadraten gaat relatie (4) over in:

$$4a^2h^2 = (2ac - b^2 + a^2 + c^2)(2ac + b^2 - a^2 - c^2)$$

$$4a^2h^2 = ((a + c)^2 - b^2)(b^2 - (a - c)^2)$$

En opnieuw de verschilformule toepassend:

$$(5a) \dots 4a^2h^2 = (a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)$$

Zoals gebruikelijk is $a + b + c = 2s$ (de omtrek van de driehoek). Uit (5) volgt daarmee:

$$(5b) \dots 4a^2h^2 = 2s \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - a)$$

En dan is:

$$(6) \dots \left(\frac{1}{2} ah \right)^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

Voor de oppervlakte O van driehoek ABC geldt onder andere: $O = \frac{1}{2} ah$.

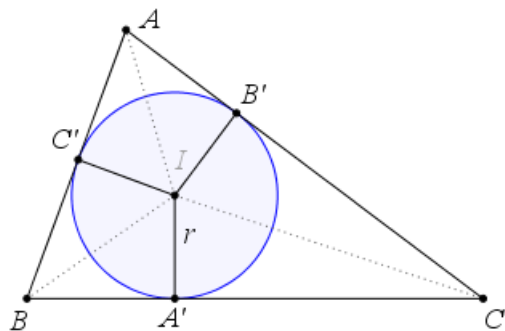
En daarmee is volgens uitdrukking (6) bewezen:

Stelling 1 (formule van Heron; naar Heron van Alexandrië, $\pm 10 - \pm 75$, Egypte). Voor de oppervlakte O van driehoek ABC geldt:

$$(7) \dots O^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

waarbij s gelijk is aan de halve omtrek van die driehoek. $\diamond$

figuur 2



Stelling 2. De lengte van een raaklijnstuk uit een hoekpunt van een driehoek aan de incirkel van die driehoek is gelijk aan de *halve* omtrek van die driehoek verminderd met de lengte van de overstaande zijde van dat hoekpunt.

In formule: $AB' = s - a$, $BC' = s - b$, $CA' = s - c$. $\diamond$

Bewijs. In figuur 2 is I het middelpunt van de incirkel van driehoek ABC en zijn A' , B' , C' de raakpunten van die cirkel met de zijden. De lengte van de straal van de incirkel is gelijk aan r . Ik stel $AB' = x$, $BC' = y$, $CA' = z$. Omdat de (lengtes van de) raaklijnstukken twee aan twee gelijk zijn, is:

$$x + y + z = s$$

en $y + z = BC' + CA' = BA' + CA' = a$, zodat $x + a = s$. Dus: $AB' = x = s - a$.

Analoog is $BC' = y = s - b$ en $CA' = z = s - c$. $\diamond$

Gevolg. En formule voor de oppervlakte O van driehoek ABC luidt dan:

$$\begin{aligned} O &= O_{ABI} + O_{BCI} + O_{CAI} = \\ &= \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot CA = \frac{1}{2} r(a + b + c) = rs \end{aligned}$$

Of ook, vanwege de symmetrie in AI , BI en CI :

$$\begin{aligned} O &= 2O_{AB'I} + 2O_{AC'I} + 2O_{CA'I} = \\ &= r(s - a) + r(s - b) + r(s - c) = \\ &= r(2s - (a + b + c)) = r(2s - s) \end{aligned}$$

Zodat opnieuw blijkt dat:

$$(8) \dots O = rs \quad \diamond$$

Uit (7) en (8) volgt:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs$$

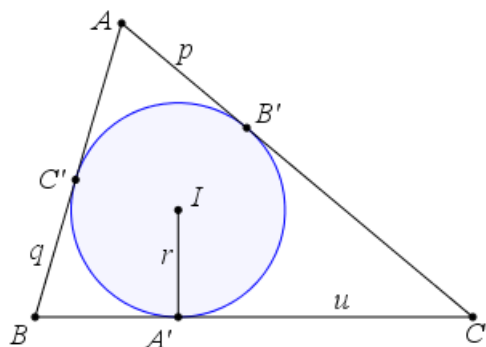
En daarmee is bewezen:

Stelling 3. In een willekeurige driehoek ABC waarvan r de (lengte van de) straal van de incirkel is, geldt:

$$(9) \dots r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

In hetgeen volgt wordt deze stelling iets anders toegepast. De lezer ga zelf na dat de bij figuur 3 vermelde formule (10) juist is.

figuur 3



In deze figuur, met $AB' = p$, $BC' = q$ en $CA' = u$, geldt ook:

$$\sqrt{(p+q+u)pqu} = (p+q+u) \cdot r$$

Na kwadrateren en een kleine vereenvoudiging:

$$pqu = (p+q+u) \cdot r^2$$

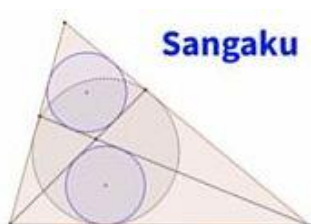
Zodat:

$$(10) \dots p = \frac{(q+u)r^2}{qu-r^2} = \frac{ar^2}{qu-r^2} = \frac{ar^2}{(s-b)(s-c)-r^2}$$

2. En waarom dit alles?

Een tijdje geleden plaatste ik op de Facebook-pagina van de besloten groep “Leraar Wiskunde”^[1, 2] het in figuur 4 vermelde probleem, onder het kopje “Als het in de vakantie regent?”. Vandaar ook de titel van dit artikel.

figuur 4



Sangaku

In dit plaatje, dat in oorsprong een Japans tempelplaatje is, kan je leuk met meetkunde bezig zijn.

[3]

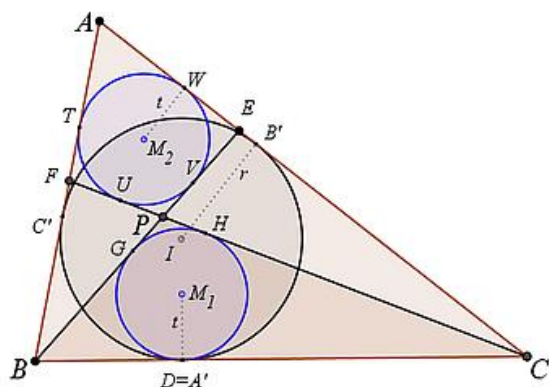
> Bewijs dat de onderste cirkel in hetzelfde punt aan de zijde van de basisdriehoek raakt als de ingeschreven cirkel van de basisdriehoek.

> Kunnen de twee gelijke cirkels in een willekeurige driehoek met passer en latje geconstrueerd worden?

> En hoe groot is de straal van de evengrote cirkels, uitgedrukt in de lengtes van de zijden van de driehoek?!

In figuur 5 staat dezelfde driehoek als in figuur 4, maar dan met namen bij de significante punten.

figuur 5



De lijn BE raakt aan de kleine cirkels in G en V , de lijn CF raakt aan die cirkels in H en U . De cirkel met middelpunt M_1 raakt aan BC in D , die met middelpunt M_2 raakt aan AB in T en aan AC in W .

De incirkel van driehoek ABC (middelpunt I , straal r) raakt de zijden van de driehoek opvolgend in A' , B' , C' .

Eigenschap D1. In de configuratie van figuur 5 geldt: de punten D en A' vallen samen.

Met andere woorden: de cirkel met middelpunt M_1 raakt aan BC in hetzelfde punt als de incirkel van de driehoek. $\diamond$

Bewijs. Ik zal laten zien dat $CD = CA'$; dit zijn resp. de lengte van het raaklijnstuk C aan cirkel M_1 en die van het raaklijnstuk uit C aan cirkel I .

In driehoek BCP is:

$$\begin{aligned} 2CD &= CD + CH = (CP - HP) + (CB - DB) = (CP - PG) + (CB - BG) = \\ &= CP + CB - (PG + BG) = CP + CB - BP \end{aligned}$$

Zodat, met $CB = a$:

$$\begin{aligned}
CD &= \frac{1}{2}(CP + CB - BP) = \frac{1}{2}((CU - UP) - (BV - VP) + a) \\
&= \frac{1}{2}(CU - BV + a) \quad // \text{ raking aan cirkel } M_2 \\
&= \frac{1}{2}(CW - BT + a) \quad // \text{ idem} \\
&= \frac{1}{2}((CA - AW) - (BA - AT) + a) \\
&= \frac{1}{2}(CA - BA + a) \quad // \text{ raking aan cirkel } M_2 \\
&= \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c = CA'
\end{aligned}$$

Waarmee het gestelde is aangetoond. $\diamond$

Eigenschap D2. In de configuratie van figuur 5 geldt: $HU = B'W$.

Bewijs. Ook nu gebruik ik de eigenschappen van de raaklijnstukken uit C aan de drie cirkels, met name eigenschap D1. En dan blijkt dat:

$$HU = CU - CH = CW - CD = CW - CB' = B'W \diamond$$

3. En verder

Omdat de punten M_2 en I beide op de bissectrice van hoek A liggen – de ‘bijbehorende’ cirkels raken immers aan de benen van hoek A – kan cirkel M_2 opgevat worden als beeld van cirkel I bij een vermenigvuldiging met het punt A als centrum.

Is t de lengte van de straal van cirkel M_2 (en dus ook van cirkel M_1), dan is:

$$AW : AB' = t : r$$

Met een (niet zo vaak gebruikte) eigenschap van evenredigheden is dan ook:

$$(AB' - AW) : AB' = (r - t) : r$$

Zodat:

$$(11) \dots BW' : AB' = (r - t) : r$$

En dan volgt uit (11), eigenschap D2 en formule (10), toepast in driehoek ABC met $p = AB'$ dat:

$$(12) \dots HU = \frac{r-t}{r} \cdot AB' = \frac{r-t}{r} \cdot \frac{ar^2}{(s-b)(s-c)-r^2} = \frac{ar(r-t)}{(s-b)(s-c)-r^2}$$

Ook is bekend dat het snijpunt van twee gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels gelegen is op de centraal van die cirkels.

Daarmee ligt P dus op M_1M_2 en, vanwege de gelijke stralen van beide cirkels, is P het midden van het lijnstuk HU . Zodat met relatie (10), toegepast in driehoek PBC met $p = PH$, geldt:

$$(13) \dots HU = 2PH = \frac{2at^2}{(s-b)(s-c)-t^2}$$

Uit (12) en (13) volgt nu direct:

Eigenschap D3. Er is een via formule (9) *impliciet* verband tussen de straal t van de beide kleine cirkels en de zijden van driehoek ABC :

$$(14a) \dots \frac{r(r-t)}{(s-b)(s-c)-r^2} = \frac{2t^2}{(s-b)(s-c)-t^2}$$

Formule (14a) kan nog op een iets andere manier geschreven worden. Ter vereenvoudiging van de verschillende stappen is $A = (s-b)(s-c)$. En daarmee blijkt:

$$\begin{aligned}
\frac{r^2 - rt}{A - r^2} &= \frac{2t^2}{A - t^2} \Rightarrow 2t^2(A - r^2) = (r^2 - rt)(A - t^2) \Rightarrow \\
2At^2 - 2r^2t^2 &= Ar^2 - r^2t^2 - Art + rt^3 \Rightarrow rt^2(r+t) = A(2t^2 + rt - r^2)
\end{aligned}$$

Herschikking van de factoren geeft dan:

$$(14b) \dots \frac{r}{A} = \frac{(2t-r)(t+r)}{t^2(r+t)} \Rightarrow \frac{r}{A} = \frac{2t-r}{t^2}$$

Zodat:

$$(14c) \dots \frac{2}{t} - \frac{r}{t^2} = \frac{r}{(s-b)(s-c)}$$

Gevolg. Uit (14b) blijkt: $\frac{r}{A}t^2 - 2t + r = 0$

Of ook:

$$(14d) \dots (\sqrt{\frac{r}{A}}t - \sqrt{\frac{A}{r}})^2 = \frac{A}{r} - r$$

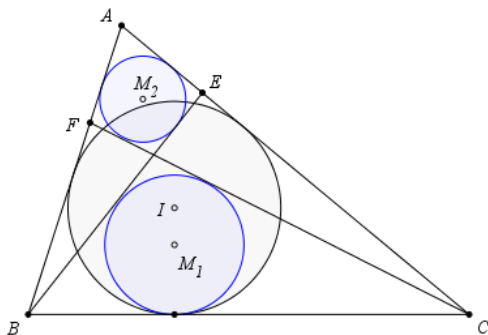
Hieruit blijkt:

Eigenschap D4. In een gegeven driehoek ABC zijn de beide gelijke cirkels die raken aan de lijnen BE en CF , als is weergegeven in de figuren 4 en 5, met passer en latje te construeren. $\diamond$

Hiermee is ook de tweede vraag die in figuur 4 staat, beantwoord. Het antwoord is “ja”. Maar ‘het hoe’ op basis van relatie (14d) vergt evenwel redelijk wat stappen.

4. Voor de lezer

figuur 6



Zie figuur 6. Als de beide kleine cirkels *niet* dezelfde straal hebben, zeg t_1 en t_2 , en toch ook raken aan lijnen BE en CF , dan luidt de met (14c) overeenkomstige relatie:

$$(15) \dots \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - \frac{r}{t_1 t_2} = \frac{r}{(s-b)(s-c)}$$

Het bewijs van formule (15) laat ik aan de lezer.

Hint. In dit geval is natuurlijk $PH \neq PU$, maar heel eenvoudig kan nu worden bewezen dat:

$$PH : PU = t_1 : t_2$$

waarmee een uitdrukking voor HU , overeenkomend met die vermeld is in (12), kan worden gevonden. $\diamond$

5. Anders ernaar kijken

Bij het probleem van paragraaf 3, dus bij een driehoek met twee *gelijke* kleine cirkels, geldt voor het punt A :

$$AB - AC = c - b$$

en voor het punt D :

$$DB - DC = (s - b) - (s - c) = c - b$$

De punten A en D hebben dus elk gelijke afstanden tot de punten B en C , zodat A en D *per definitie* liggen op een *hyperbool* K , die B en C als brandpunten heeft. Het punt D is een top van K (het punt D ligt immers op het verbindingslijnstuk van de brandpunten van K).

Als P op K ligt, dan is ook $PB - PC = c - b$. Met de raakpunten A' , G , H van de incirkel van driehoek PBC aan opvolgend de zijden BC , PB , PC (zie weer figuur 5) is dan:

$$PB - PC = (PG + GB) - (PH + HC) = GB - HC = A'B - A'C$$

Het punt A' ligt daarmee ook op K , zodat $A' \equiv D$. Het middelpunt M_1 van de incirkel van driehoek PBC ligt dus op de ‘ BC -projecterende’ lijn van het punt I .

Als er wordt uitgegaan van dit laatste, dan is onmiddellijk duidelijk dat P op K ligt.

De andere kijk op het probleem verloopt daarmee via de hyperbool K met brandpunten B en C die door A en D gaat; zie figuur 7.

Mijn doel is na te gaan of het punt P ‘met behulp van de hyperbool’ te construeren is met passer en latje.

In
be

Ik ga er dus van uit dat het gezochte (te construeren) punt P op de hyperbool K ligt; zie figuur 8. De lijn AD is een koorde van K . De richting van AD bepaalt ook een toegevoegde middellijn die door het midden O van BC gaat; zie eigenschap H2.

M_1 is dan het middelpunt van de incirkel van driehoek PBC , immers t is de bissectrice van hoek BPC (eigenschap H1) én M_1 ligt op ID welke lijn loodrecht staat op BC .

Nu is verder: $BP \& CA = E$ en $CP \& BA = F$.

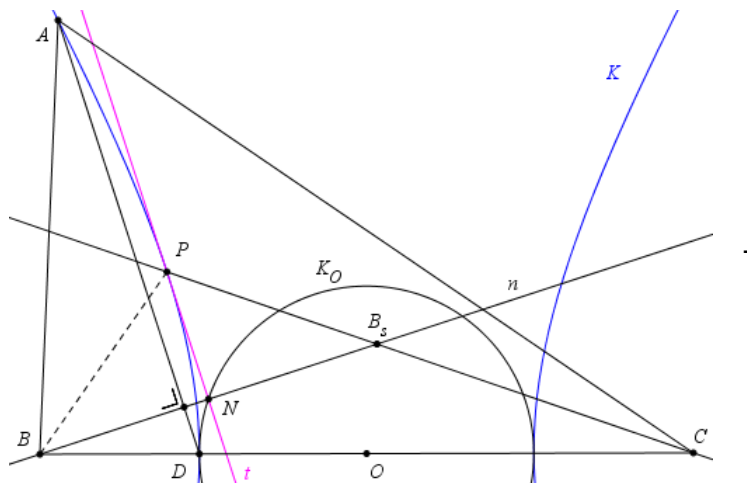
Voor het punt M_2 geldt^[5]: $d(M_2, BE) = d(M_2, BA)$, want M_2 ligt op de bissectrice van hoek EPF en op die van EAF , zodat BM_2 de bissectrice is van hoek ABP .

Daarmee zijn de afstanden van het punt M_2 tot de zijden van vierhoek $AFPE$ gelijk, zodat M_2 het middelpunt is van de incirkel van vierhoek $AFPE$.

In driehoek ADI blijkt dat $M_1P = M_2P$ ($M_1M_2 \parallel DA$). De incirkels van de driehoeken PBC en $AFPE$ zijn dus congruent.

En dan blijkt ook dat het punt P met passer en latje als punt van K te construeren is! Zie figuur 9 voor deze constructie.

figuur 9



Constructiestappen

- $K_O = \text{Cirkel}(O, OD)$
- $n = \text{Loodlijn}(B, AD)$
- $n \& K_O = N$ // N ligt het dichtst bij AD
- $t = \text{EvenwijdigeLijn}(N, AD)$
- $B_s = \text{Puntspiegeling}(B, N)$
- $P = t \& CB_s$ // P is het te construeren punt, dat gelegen is op de hyperbool K

De lezer kan gebruik maken van het gevolg van eigenschap H1 om deze laatste bewering te bewijzen.

7. Noten

- [1] Link naar de groep (alleen indien aangemeld op FB):
<https://www.facebook.com/groups/Leraarwiskunde/>
- [2] Link naar het betreffende item (alleen indien aangemeld op FB):
<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=1340908425977315&set=gm.632447593622466&type=3&theater>
- [3] In figuur 4 wordt gesproken van een 'latje'. Hiermee wordt bedoeld een liniaal zonder centimeteraanduiding
- [4] Met de notatie $X \& Y = Z$ wordt bedoeld: het snijpunt van de meetkundige objecten X en Y is het meetkundige object Z .
- [5] De functie $d(X, Y)$ geeft de afstand aan van het object X tot het object Y .

8. Appendix

Bewijs van eigenschap H1 (door berekening). Ik ga uit van de hyperbool K met vergelijking:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (\text{waarbij } a^2 + b^2 = c^2)$$

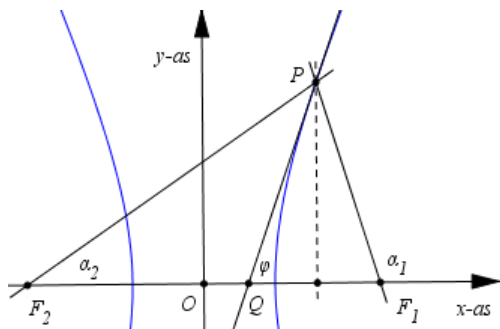
waarvan de brandpunten $F_1 = (c, 0)$ en $F_2 = (-c, 0)$ zijn. Verder ligt het punt $P = (x_0, y_0)$ op K . En PQ is de raaklijn in P aan K met vergelijking:

$$b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2$$

Zie figuur a1. De hoeken die PF_1 , PF_2 , PQ maken met de (positieve) x -as, zijn opvolgend α_1 , α_2 , φ . De hoeken QPF_1 en QPF_2 – en dat zijn de hoeken die PQ maakt met de brandpuntvoerstralen van het punt P – zijn opvolgend μ_1 , μ_2 .

Te bewijzen is nu: $\mu_1 = \mu_2$.

figuur a1



Eenvoudig is in te zien dat:

$$\tan \alpha_1 = -\frac{y_0}{x_0 - c}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{y_0}{x_0 + c}, \quad \tan \varphi = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

Verder is:

$$\mu_1 + \varphi = \alpha_1 \quad \text{en} \quad \mu_2 + \alpha_2 = \varphi$$

zodat te bewijzen is:

$$\alpha_1 - \varphi = \varphi - \alpha_2 \quad (= -\alpha_2 + \varphi)$$

Nu is:

$$\tan(\alpha_1 - \varphi) = \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 + \frac{y_0}{x_0 - c} \cdot \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}} = \frac{a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 + b^2 c x_0}{a^2 x_0 y_0 - a^2 c y_0 + b^2 x_0 y_0}$$

en omdat P op K ligt – en daarmee de coördinaten x_0, y_0 voldoen aan de vergelijking van K – en omdat ook $a^2 + b^2 = c^2$, is:

$$\tan(\alpha_1 - \varphi) = \frac{-a^2 b^2 + b^2 c x_0}{c^2 x_0 y_0 - a^2 c y_0} = \frac{b^2 (c x_0 - a^2)}{c y_0 (c x_0 - a^2)} = \frac{b^2}{c y_0}$$

Met vervanging van $-c$ door c in deze laatste formule blijkt:

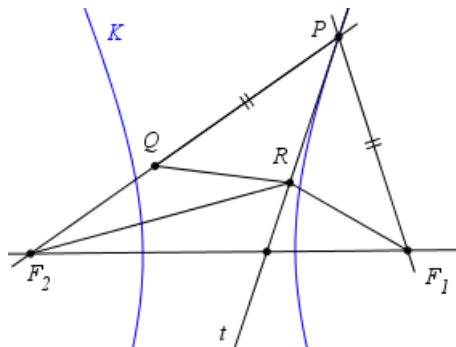
$$\tan(\varphi - \alpha_2) = -\tan(\alpha_2 - \varphi) = -\frac{b^2}{-c y_0} = \frac{b^2}{c y_0}$$

De tangenten van de beschouwde hoeken zijn dus gelijk. En omdat beide hoeken *scherp* zijn, is inderdaad: $\alpha_1 - \varphi = \varphi - \alpha_2$.

Met andere woorden: de raaklijn in een punt van een hyperbool is de bissectrice van de hoek tussen de brandpuntvoerstralen van dat punt. $\diamond$

Er is overigens ook een eenvoudig *synthetisch bewijs* van deze eigenschap H1.

figuur a2



In dit geval ga ik uit van de bissectrice t van hoek $F_1 P F_2$; zie figuur a2.

Er geldt dan *per definitie*:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \quad (= \text{constant})$$

Zonder de algemene geldigheid van het hierna volgende bewijs geweld aan te doen veronderstel ik:

$$PF_1 < PF_2$$

Ik kies op PF_2 het punt Q zó dat $PQ = PF_1$. Daarmee is $QF_2 = 2a$. En voorts zij $R (\neq P)$ een *willekeurig* punt op t .

Dan is ook $RF_1 = RQ$, omdat de driehoeken RF_1P en RQP congruent zijn (ZHZ).

Nu is:

$$RF_2 - RF_1 = RF_2 - RQ < QF_2 = 2a$$

vanwege de driehoeksongelijkheid in driehoek RQF_2 .

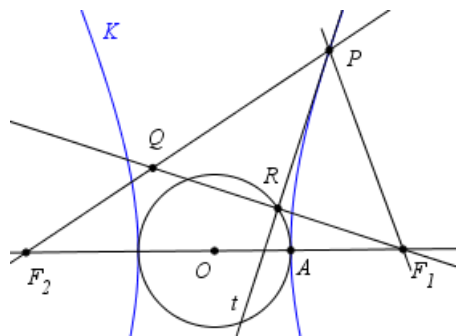
Uit $RF_2 - RF_1 < 2a$ volgt dat het punt R *niet* op K ligt.

Er is dus precies één punt van de lijn t , namelijk het punt P , dat *wél* op K ligt. De lijn t raakt dus in P aan K . $\diamond$

Gevolg

Op basis van het bovenstaande synthetische bewijs kan elk punt P van een hyperbool K met passer en latje worden geconstrueerd.

figuur a3



Gegeven zijn de brandpunten F_1, F_2 en een top A van K ; zie figuur a3.

Constructiestappen

- $O = \text{Midden}(F_1, F_2)$
- $\text{Cirkel}(O, OA)$
- Kies het punt R willekeurig op de cirkel
- $Q = \text{Puntspiegeling}(R, F_1)$
- $t = \text{Middelloodlijn}(F_1, Q)$
- $P = t \ \& \ F_2Q$

Het bewijs van de juistheid van deze constructie laat ik aan de lezer.

Opmerking. Doorloopt het punt R de cirkel O , dan doorloopt het punt P de door F_1, F_2, A bepaalde hyperbool.

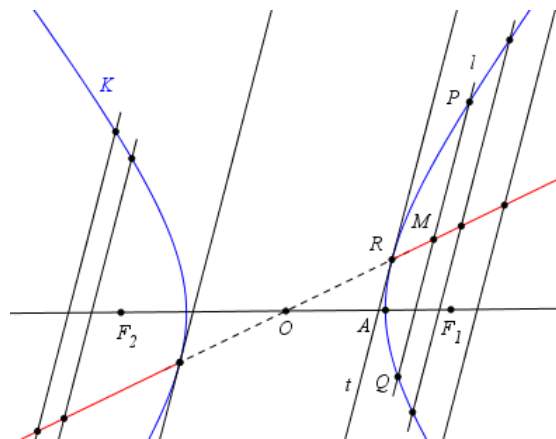
Bewijs van eigenschap H2. Ik ga weer uit van een hyperbool K met vergelijking:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Voorts heeft een lijn l die K snijdt in de punten P en Q , als vergelijking:

$$y = mx + q$$

figuur a4



Zie figuur a4. Voor de x -coördinaten van P en Q geldt nu:

$$b^2x^2 - a^2(mx + q)^2 = a^2b^2 \Rightarrow (a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2mqx + a^2q^2 + a^2b^2 = 0$$

Is nu M het midden van het lijnstuk PQ met x -coördinaat x_M , dan is, volgens de eigenschap van de som van de wortels x_1, x_2 van een vierkantsvergelijking:

$$(a1) \dots x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2a^2mq}{a^2m^2 - b^2} = \frac{-a^2mq}{a^2m^2 - b^2}$$

Voor de bijbehorende y -coördinaat y_M van M is dan:

$$(a2) \dots y_M = mx_M + q$$

Eliminatie van q uit de relaties (a1) en (a2) met daarbij gebruik van ‘lopende’ coördinaten ($x_M \rightarrow x$, $y_M \rightarrow y$) geeft de *meetkundige plaats* van de punten M als de lijn l , en daarmee dus de koorde PQ , evenwijdig verplaatst wordt. Dan is:

$$x = \frac{-a^2 m(y - mx)}{a^2 m^2 - b^2} \Rightarrow (a^2 m^2 - b^2)x = -a^2 my + a^2 m^2 x$$

Zodat:

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x$$

En dit is de vergelijking van een rechte lijn die door het middelpunt O van de hyperbool gaat. Een dergelijke lijn is in dit verband een *middellijn* van de hyperbool en wordt ook *middellijn van het stelsel koorden* genoemd.

Waarmee de genoemde eigenschap bewezen is. $\diamond$

Gevolgen

1. Zie figuur a4. De middellijn van een stelsel evenwijdige koorden van een hyperbool gaat ook door het raakpunt van de raaklijn die dezelfde richting heeft als de koorden.. Immers, bij het (evenwijdig) opschuiven van de koorde in de richting van het raakpunt valt uiteindelijk het midden van de koorde samen met het raakpunt.

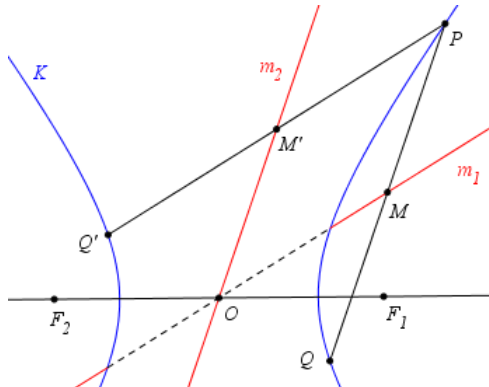
2. De richting van de koorden en de richting van de ‘bijbehorende’ middellijn zijn zogeheten *toegevoegde richtingen*:

$$m_1 = \text{rico}(\text{koorden}) = m \quad \text{en} \quad m_2 = \text{rico}(\text{middellijn}) = \frac{b^2}{a^2 m}$$

Voor het product van twee bij een hyperbool toegevoegde richtingen m_1, m_2 geldt:

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2}$$

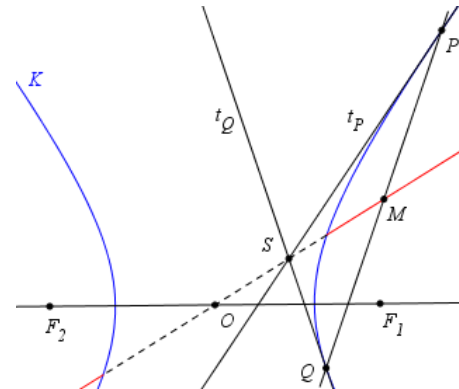
figuur a5



3. Zie figuur a5. Uit de symmetrie van het bovenstaande volgt dat de middens van de koorden die evenwijdig zijn aan een middellijn van een hyperbool, op een middellijn liggen die een richting heeft die toegevoegd is aan de richting van de middellijn.

Er zijn dus telkens twee middellijnen met toegevoegde richtingen. Dit zijn zogeheten *toegevoegde middellijnen*.

figuur a6



4. Zie figuur a6. De middellijn van een hyperbool K door een punt S gaat door het midden M van de (raak)koorde PQ waarvan de poollijn van S de drager is.

Of ook: de pool van de poollijn bij een hyperbool ligt op de middellijn door het midden van de door de poollijn bepaalde raakkoorde.

Bewijs. Is $S = (x_0, y_0)$ een willekeurig (reëel) punt en $K: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ de hyperbool, dan is de vergelijking van de poollijn van S bij K :

$$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$$

Zodat $\text{rico(koorde/poollijn)} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ en $\text{rico(middellijn)} = \frac{y_0}{x_0}$ (conform gevolg 2).

Een vergelijking van de middellijn is dan:

$$y = \frac{y_0}{x_0} x$$

waaruit direct duidelijk is dat het punt S op die middellijn ligt. $\diamond$